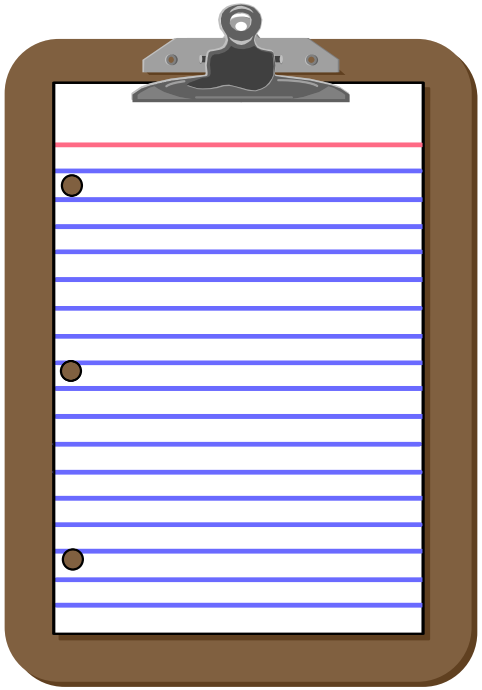
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Επιχειρησιακή Έρευνα

Θεωρία Δυαδικότητας

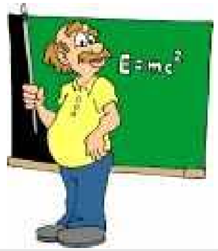
Η παρουσίαση προετοιμάστηκε από τον Ν.Α. Παναγιώτου

Περιεχόμενα Παρουσίασης



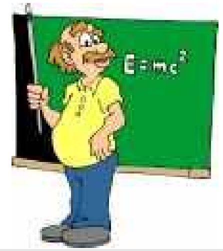
1. **Βασικά Θεωρήματα**
2. **Παραδείγματα**
3. **Οικονομική Ερμηνεία**
4. **Συμπεράσματα**

Κανονική Μορφή Μαθηματικού Μοντέλου του Γενικού Προβλήματος ΓΠ



- Η αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποιείται
- Οι περιορισμοί είναι όλοι ανισότητες (<=)
- Δεν υπάρχει περιορισμός για το πρόσημο των b_i
- Δηλαδή:
  - max $z = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j$ με τους περιορισμούς:
    - $\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j <= b_i$ για $i = 1, 2, \ldots m$
    - $x_j >= 0$, για $j = 1, 2, \ldots, r$
- Κάθε πρόβλημα ΓΠ μπορεί να τεθεί στην κανονική μορφή

Βασικές Τεχνικές



- min $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_r x_r$ ισοδυναμεί με:

  max $z' = -z = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_r x_r$

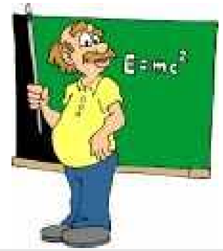
- >= ισοδυναμεί με -<=-

- $\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j = b_i$ ισοδυναμεί με

  $\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j <= b_i$ και

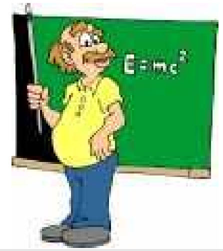
  $\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j >= b_i$ ή $-\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j <= -b_i$

Ορισμένες Γενικές Αρχές (1/2)...



- Το δυαδικό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποιήσεως σε κανονική μορφή
- Όταν το πρωτεύον πρόβλημα έχει n μεταβλητές απόφασης, τότε το δυαδικό έχει n περιορισμούς. Ο 1ος περιορισμός του δυαδικού συσχετίζεται με την μεταβλητή x_1 του πρωτεύοντος, ο 2ος με τη μεταβλητή x_2 κ.ο.κ.
- Όταν το πρωτεύον έχει m περιορισμούς, το δυαδικό έχει m μεταβλητές. Η μεταβλητή του δυαδικού u_1 συσχετίζεται με τον πρώτο περιορισμό του πρωτεύοντος κ.ο.κ.

Ορισμένες Γενικές Αρχές (2/2)...



- Τα δεξιά τμήματα των περιορισμών του πρωτεύοντος προβλήματος γίνονται οι σταθερές της αντικειμενικής συνάρτησης στο δυαδικό πρόβλημα
- Οι σταθερές της αντικειμενικής συνάρτησης στο δυαδικό πρόβλημα γίνονται τα δεξιά τμήματα των περιορισμών του δευτερεύοντος
- Οι σταθερές των περιορισμών της μεταβλητής i του πρωτεύοντος προβλήματος γίνονται οι σταθερές στον περιορισμό i του δυαδικού προβλήματος

Ένα Παράδειγμα Κανονικοποίησης...

$$\min z = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

...με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \le 40$$
$$x_1 + 9x_2 - 7x_3 \ge 50$$
$$5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 = 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

...και που στην κανονική μορφή γίνεται:

$$\max z' = -z = -3x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

...με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \le 40$$
$$-x_1 - 9x_2 + 7x_3 \le -50$$
$$5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 \le 20$$
$$-5x_1 - 3x_2 - 3.5x_3 \le -20$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Σύγκριση Πρωτεύοντος & Δυαδικού Προβλήματος

$\max z_x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_r x_r$

$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1j} x_j + a_{1r} x_r <= b_1$

…

$a_{i1} x_1 + \ldots + a_{ij} x_j + a_{ir} x_r <= b_i$

…

$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mj} x_j + a_{mr} x_r <= b_m$

και $x_j >= 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$

$\min z_u = b_1 u_1 + \ldots + b_i u_i + \ldots + b_m u_m$

$a_{11} u_1 + \ldots + a_{i1} u_i + a_{m1} u_m >= c_1$

…

$a_{1j} u_1 + \ldots + a_{ij} u_i + a_{mj} u_m >= c_j$

…

$a_{1r} u_1 + \ldots + a_{jr} u_j + a_{mr} u_m >= c_r$

και $u_i >= 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$

…και σε μητρική μορφή…

$\max z_x = c\, x$

$R\, x <= b$

$x >= 0$

…και σε μητρική μορφή…

$\min z_u = b'\, u$

$R'\, u >= c'$

$u >= 0$, όπου $u = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$,

Ένα Ακόμα Παράδειγμα...

$$\max z_x = 2\,x_1 + 3\,x_2 + 7\,x_3$$

$$\min z_u = 15\,u_1 + 4\,u_2 + 22\,u_3 + 6\,u_4 + 9\,u_5$$

…με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
2\,x_1 + 3\,x_2 \qquad\qquad &<= 15\\
x_1 \qquad + \quad x_3 &<= 4\\
4\,x_2 + 7\,x_3 &<= 22\\
x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &<= 6\\
3\,x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad &<= 9\\
x_1, x_2, x_3 &>= 0
\end{aligned}$$

…με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
2\,u_1 + u_2 \qquad\qquad + u_4 + 3\,u_5 &>= 2\\
3\,u_1 \qquad + 4\,u_3 + u_4 + u_5 &>= 3\\
u_2 + 7\,u_3 + u_4 \qquad &>= 7\\
u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 &>= 0
\end{aligned}$$

Βασικά Θεωρήματα (1/3)

- Θεώρημα 6: Το δυαδικό του δυαδικού ενός προβλήματος ΓΠ είναι αυτό το ίδιο το πρωτεύον πρόβλημα
- Θεώρημα 7: Εάν, είτε το πρωτεύον είτε το δυαδικό πρόβλημα έχει πεπερασμένη βέλτιστη δυνατή λύση, τότε και το άλλο έχει πεπερασμένη βέλτιστη δυνατή λύση και η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης των δύο προβλημάτων είναι η ίδια, δηλαδή: $\max z_x = \min z_u$

Εάν ένα από τα δύο προβλήματα έχει λύση μη πεπερασμένη τότε το άλλο πρόβλημα δεν έχει δυνατή λύση (το αντίστροφο δεν ισχύει)

Βασικά Θεωρήματα (2/3)

- Θεώρημα 8: Η βέλτιστη τιμή της i δυαδικής μεταβλητής u_i ισούται με την αρνητική (θετική στην περίπτωση που το πρωτεύον είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμούς >=) τιμή του οριακού καθαρού εισοδήματος της i-στης μεταβλητής αποκλίσεως του πρωτεύοντος προβλήματος που βρίσκεται στην τελευταία σειρά του πίνακα της βέλτιστης λύσης
- Θεώρημα 9: Η βέλτιστη τιμή της j-στης μεταβλητής αποκλίσεως του δυαδικού προβλήματος ισούται με την αρνητική (θετική στην περίπτωση που το πρωτεύον είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμούς >=) τιμή του οριακού καθαρού εισοδήματος της j-στης αρχικής μεταβλητής του πρωτεύοντος, που βρίσκεται στην τελευταία σειρά του πίνακα της βέλτιστης λύσης

Βασικά Θεωρήματα (3/3)

- Θεώρημα 10: Αν και το πρωτεύον και το δυαδικό πρόβλημα έχουν πεπερασμένες δυνατές λύσεις και είναι $(x_1, x_2, \ldots, x_{r+m})$ μία βασική δυνατή μη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος με αντίστοιχα οριακά καθαρά εισοδήματα $c_j - z_j$ τότε η
  $u_i = z_{r+i} = -\bar{c}_{r+i}$ για $i=1,2,\ldots,m$
  $u_{m+j} = z_j - c_j = -\bar{c}_j$ για $j=1,2,\ldots,r$
- Η Simplex ψάχνει για βασικές μη βέλτιστες λύσεις (η βέλτιστη είναι η τελευταία) στο πρωτεύον πρόβλημα, αλλά συγχρόνως, εμμέσως (μέσω του αντίστοιχου δυαδικού) ψάχνει μη δυνατές λύσεις καλύτερες της βέλτιστης
- Το παραπάνω είναι αποτέλεσμα του ότι μη βέλτιστες δυνατές λύσεις οποιουδήποτε των δύο προβλημάτων είναι συμπληρωματικές προς βασικές λύσεις του άλλου προβλήματος

Άλλο Ένα Παράδειγμα...

$\max z_x = 2x_1 + x_2$

…με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 8 \\ 3x_1 - x_2 &\le 10 \\ x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\min z_u = 8u_1 + 10u_2 + 6u_3 + 2u_4$

…με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned} u_1 + 3u_2 + u_3 &\ge 2 \\ u_1 - u_2 + 2u_3 + u_4 &\ge 1 \\ u_1, u_2, u_3, u_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Επίλυση Πρωτεύοντος, Αρχικός Πίνακας...

Βάση	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	x_B
α_3	1	1	1	0	0	0	8
α_4	3	-1	0	1	0	0	10
α_5	1	2	0	0	1	0	6
α_6	0	1	0	0	0	1	2
c_j-z_j	2	1	0	0	0	0	z=0

r=2

κ=1

Επίλυση Πρωτεύοντος, Δεύτερος Πίνακας...

Βάση	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	x_B
α_3	0	4/3	1	-1/3	0	0	14/3
α_1	1	-1/3	0	1/3	0	0	10/3
α_5	0	7/3	0	-1/3	1	0	8/3
α_6	0	1	0	0	0	1	2
c_j-z_j	0	5/3	0	-2/3	0	0	z=20/3

r=2

κ=1

Επίλυση Πρωτεύοντος, Τελικός Πίνακας...

Βάση	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	x_B
α_3	0	0	1	-1/7	-4/7	0	22/7
α_1	1	0	0	2/7	1/7	0	26/7
α_2	0	1	0	-1/7	3/7	0	8/7
α_6	0	0	0	1/7	-3/7	1	6/7
c_j-z_j	0	0	0	-3/7	-5/7	0	$z^*=60/7$

Θεώρημα 9 ***Θεώρημα 8***

Λύσεις Δυαδικού Προβλήματος

$u^*_5=0,\ u^*_6=0$

$u^*_1=0,\ u^*_2=3/7,\ u^*_3=5/7,\ u^*_4=0$

$z^*_u=60/7$

Οικονομική Ερμηνεία (1/4)

- x_j: Η στάθμη της δραστηριότητας j
- c_j: Η μοναδιαία αξία (κέρδος) της δραστηριότητας j
- b_i: Η ποσότητα του πόρου i που διατίθεται συνολικά
- α_{ij}: Η ποσότητα του πόρου i που καταναλίσκεται από την δραστηριότητα j
- u_i: (αξία / μον. μέτρ. x_j) / (μον. μέτρ. πόρου i / μον. μέτρ. x_j) = αξία / μον. μέτρ. πόρου i
- u^*_i: Μοναδιαία ή οριακή αξία (marginal value) του πόρου i

$$a_{1j}\, u_1 + \ldots + a_{ij}\, u_i + a_{mj}\, u_m >= c_j$$

Οικονομική Ερμηνεία (2/4)

Πρωτεύον Πρόβλημα

Με δεδομένη την αξία ανά μονάδα προϊόντος, ζητείται να βρεθεί η ποσότητα παραγωγής που θα μεγιστοποιεί την αξία της συνολικής παραγωγής. Οι περιορισμοί αναφέρονται σε περιορισμένη παρουσία των πόρων.

Δυαδικό Πρόβλημα

Με δεδομένη τη διαθεσιμότητα κάθε πόρου (b_i), ζητείται να βρεθεί η αξία ανά μονάδα πόρου ώστε η συνολική αξία των πόρων να ελαχιστοποιείται. Οι περιορισμοί απαιτούν η ανά μονάδα αξία των πόρων να είναι μεγαλύτερη ή ίση από την αξία κάθε μονάδας που παράγεται.

Οικονομική Ερμηνεία (3/4)

α_{ij}: Η ποσότητα του πόρου i που καταναλίσκεται από την δραστηριότητα j

u_i: Μοναδιαία αξία πόρου i για εκείνον που χρησιμοποιεί τον πόρο

$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i$: Αποδιδόμενο κόστος λειτουργίας δραστηριότητας j

Η ποσότητα επί την μοναδιαία αξία του πόρου i θα πρέπει να υπερβαίνει το κέρδος που θα μπορούσε να ληφθεί από την δραστηριότητα...

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i >= c_j$$

… αλλιώς το u_i θα υποεκτιμούσε τις αληθινές αποδιδόμενες αξίες μερικών από τους διαθέσιμους πόρους

Οικονομική Ερμηνεία (4/4)

$$z^*_u = b_1 u^*_1 + b_2 u^*_2 + \ldots + b_m u^*_m$$

Το u^*_i μας δίνει το ρυθμό αύξησης (ή μείωσης) του κέρδους που συνεπάγεται η αύξηση (ή μείωση) της ποσότητας b_i του διαθέσιμου πόρου i μέσα σε ορισμένα όρια μεταβολής του b_i στα οποία διατηρείται η βέλτιστη βάση. Άρα, η u^*_i μπορεί να ερμηνευθεί ως η μοναδιαία ή οριακή αξία του πόρου i

Παράδειγμα:

Η αύξηση της διαθέσιμης ποσότητας του πόρου i κατά 1 σημαίνει αύξηση του κέρδους κατά u^*_i (εφόσον η βέλτιστη βάση παραμένει η ίδια)

Συσχέτιση Πρωτεύοντος & Δυαδικού

Θα πρέπει να προσεχθούν τα παρακάτω:

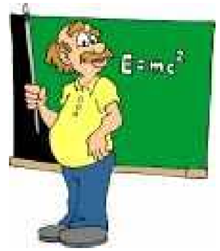
1. Εάν ο i-στός περιορισμός του πρωτεύοντος προβλήματος είναι ισότητα, η αντίστοιχη i-στη μεταβλητή του δυαδικού προβλήματος δεν έχει περιορισμό ως προς το πρόσημο.

2. Εάν η j-στή μεταβλητή του πρωτεύοντος προβλήματος δεν έχει περιορισμό ως προς το πρόσημο, ο j-στός περιορισμός του δυαδικού του θα είναι ισότητα. Αυτή είναι και η μόνη περίπτωση που θα έχουμε σχέση ισότητας στο δυαδικό πρόβλημα.

Σύνοψη Συσχέτισης Πρωτεύοντος & Δυαδικού

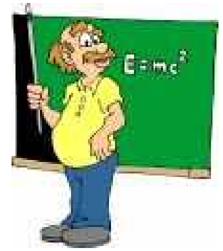
Πρωτεύον Πρόβλημα	Δυαδικό Πρόβλημα
-Πρόβλημα μεγιστοποιήσεως	-Πρόβλημα ελαχιστοποιήσεως
-Συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης	-Σταθεροί όροι περιορισμών
-Σταθεροί όροι περιορισμών	Συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης
-Τεχνολογική μήτρα	-Ανάστροφη Τεχνολογική μήτρα
-Περιορισμοί •i στη ανισότητα <= •i στη ανισότητα =	-Μεταβλητές •u_j >=0 •u_j ><0
-Μεταβλητές •x_j >=0 •x_j ><0	-Περιορισμοί •j-στη ανισότητα >= •j-στη ανισότητα =

Χρησιμότητα Θεωρίας Δυαδικότητας



- Διευκολύνει την επίλυση του αντίστοιχου πρωτεύοντος προβλήματος σε ορισμένες περιπτώσεις
- Παρέχει οικονομικές πληροφορίες για τα μεγέθη του πρωτεύοντος
- Χρησιμεύει στην πραγματοποίηση αναλύσεων ευαισθησίας

Παράδειγμα Προβλήματος Δυαδικότητας



- Έστω ότι κάποιος αντιμετωπίζει το κλασικό πρόβλημα δίαιτας, σύμφωνα με το οποίο επιχειρείται να ελαχιστοποιηθεί το κόστος αγοράς τροφίμων ώστε να εξασφαλιστούν κάποιες ελάχιστες ποσότητες βιταμινών
  - Έστω, λοιπόν, ότι ενδιαφερόμαστε για 2 βιταμίνες, τις A και C, οι οποίες μπορούν να εξασφαλιστούν από έξι διαφορετικές τροφές, τις $Φ_1$, $Φ_2$, $Φ_3$, $Φ_4$, $Φ_5$, $Φ_6$,

Δεδομένα Προβλήματος

	Περιεκτικότητα Τροφίμων ανά 100 γραμμάρια						
Βιταμίνες	**Φ1**	**Φ2**	**Φ3**	**Φ4**	**Φ5**	**Φ6**	**Min Ποσότητα**
A	1	0	2	2	1	2	9
C	0	1	3	1	3	2	19
Τιμή Πώλησης	1.05	0.90	1.80	1.50	0.75	0.66	

Μαθηματική Διατύπωση Προβλήματος

- Min z = Min { $1.05x_1 + 0.90\ x_2 + 1.80x_3 + 1.50x_4 + 0.75x_5 + 0.66x_6$ }
- Περιορισμοί
  - $x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 >= 9$
  - $2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \}>= 19$
  - $x_i >= 0$, $i = 1..6$
- Εισάγουμε δύο βοηθητικές μεταβλητές s_1 και s_2
- Αντικειμενικός σκοπός είναι ο περιορισμός του κόστους λαμβάνοντας όμως τις ελάχιστα απαιτούμενες βιταμίνες A και C

Τελικός Πίνακας Simplex Προβλήματος

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	x_B
b_1	¾	-1/4	1/2	5/4	0	1	-3/4	1/4	2
b_2	-1/2	1/2	-1/2	1	1	0	1/2	5	5
c_j-z_j	0.93	0.69	0.93	1.05	0	0	0.12	0.21	**Z*= 5.07**

- Εάν η δίαιτα θα έπρεπε να αυξηθεί κατά μία μονάδα σε A θα έπρεπε να πληρώσω €0.12 παραπάνω από τα 5.07 (= z)
- Αντίστοιχα ισχύουν και για τη βιταμίνη C

Δυαδικές Τιμές

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	x_B
b_1	¾	-1/4	1/2	5/4	0	1	-3/4	1/4	2
b_2	-1/2	1/2	-1/2	1	1	0	1/2	5	5
c_j-z_j	0.93	0.69	0.93	1.05	0	0	0.12	0.21	**Z*= 5.07**

- Με βάση το δυαδικό πρόβλημα ισχύει:
  - $u_1 = 0.12$, $u_2 = 0.21$
  - $u_3 = 0.93$, $u_4 = 0.69$, $u_5 = 0.93$, $u_6 = 1.05$, $u_7 = 0$, $u_8 = 0$

Διατύπωση Δυαδικού Προβλήματος

- Έστω ότι ένας φαρμακοποιός μπορεί να εξασφαλίσει τις βιταμίνες A και C σε φαρμακευτικά σκευάσματα και θέλει να παρέχει εναλλακτική λύση στους ίδιους πελάτες με αυτούς που επιδιώκουν την απόκτηση μίας ελάχιστης ποσότητας βιταμινών ίδιας με αυτής του προηγούμενου προβλήματος
- Για να είναι τα φαρμακευτικά σκευάσματα ανταγωνιστικά, θα πρέπει η μοναδιαία τιμή στην οποία προσφέρονται (έστω Y_A και Y_C) να συμφέρει σε σχέση με την αγορά των τροφίμων του αρχικού προβλήματος
- Άρα, η τιμή για κάθε συνδυασμό βιταμινών που αντιστοιχούν σε ένα τρόφιμο θα πρέπει να είναι μικρότερη από το κόστος του τροφίμου στην αγορά

Μαθηματική Διατύπωση Δυαδικού Προβλήματος

- Αντικειμενική Συνάρτηση
  - Max { $9\ Y_A + 19\ Y_C$}, δηλαδή μεγιστοποίηση των εσόδων του φαρμακοποιού για το ελάχιστο των βιταμινών που ζητά ο κάθε πελάτης
- Υφιστάμενοι Περιορισμοί
  - $Y_A <= 1.05$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_1$)
  - $Y_C <= 0.90$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_2$)
  - $2Y_A + 3Y_C <= 1.80$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_3$)
  - $Y_A + Y_C <= 1.50$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_4$)
  - $Y_A + 3Y_C <= 0.75$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_5$)
  - $2Y_A + 2Y_C <= 0.66$ (Τιμή Τροφίμου $Φ_6$)

Επίλυση Δυαδικού Προβλήματος

- Για την επίλυση του προβλήματος, πρέπει να εισαχθούν έξι βοηθητικές μεταβλητές ($\varepsilon_1..\varepsilon_6$), οι οποίες εκφράζουν τη διαφορά της τιμής μίας μονάδας τροφής Φ_i στην αγορά τροφίμων σε σχέση με το φαρμακείο
- Η επίλυση του προβλήματος οδηγεί στον προσδιορισμό των ακόλουθων τιμών
  - $Y_A^* = €0.12$, $Y_c^* = €\ 0.21$
  - $\varepsilon_1 = 0.93$, $\varepsilon_2 = 0.69$, $\varepsilon_3 = 0.93$, $\varepsilon_4 = 1.05$, $\varepsilon_5 = 0$, $\varepsilon_6 = 0$

Οι ε_5 και ε_6 είναι εκτός βάσης, επομένως παίρνουν τις τιμές 0

Ερμηνεία Δυαδικού Προβλήματος

- Εάν οι βιταμίνες πωληθούν προς 12 και 21 λεπτά, τότε τα τρόφιμα $Φ_5$ και $Φ_6$ δεν θα έχουν διαφορά σε σχέση με την αγορά (στοιχείο που είχε προκύψει έμμεσα και από το πρωτεύον πρόβλημα, αφού αυτά τα δύο τρόφιμα είχαν δώσει τη βέλτιστη λύση)
- Τα τρόφιμα $Φ_1$, $Φ_2$, $Φ_3$, και $Φ_4$ είναι ακριβότερα στην αγορά απ' ότι στο φαρμακείο κατά τα νούμερα των μεταβλητών $ε_1..ε_5$
- Επομένως, οι δυαδικές τιμές εκφράζουν την αξία των Ά Υλών του προβλήματος (όπως οι βιταμίνες είναι οι Ά Ύλες των τροφίμων)
- Εάν αυξηθούν οριακά οι τιμές ενός περιορισμού, η επίπτωση στην αντικειμενική συνάρτηση θα ισούται οριακά με τη δυαδική τιμή του αντίστοιχου περιορισμού

Ερμηνεία Δυαδικών Τιμών

- Η δυαδική (ή δυική) τιμή που αντιστοιχεί σε έναν περιορισμό (αφού εισάγεται η αντίστοιχη βοηθητική μεταβλητή για να καταστήσει την ανισοισότητα σε ισότητα) είναι η αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης που θα προκύψει από μοναδιαία αύξηση της αντίστοιχης σταθεράς b_j του περιορισμού
- Η δυαδική τιμή μιας Ά Ύλης είναι η πραγματική (εσωτερική) αξία (ή κόστος) που έχει οριακά μία μονάδα αυτής της Ά Ύλης στη δεδομένη παραγωγή

Επιπλέον Κόστος

- Το επιπλέον κόστος μίας μεταβλητής i είναι η μεταβολή την οποία πρέπει να υποστεί ο συντελεστής αυτής της μεταβλητής στην αντικειμενική συνάρτηση ώστε η μεταβλητή αυτή να πάρει θετική τιμή στη βέλτιστη λύση
- Το επιπλέον κόστος εκφράζεται από το οριακό καθαρό εισόδημα

Επιπλέον Κόστος

- Ένας τρόπος για να επαληθευτεί το επιπλέον κόστος ενός προϊόντος είναι ο εξής:
  - α. Να υπολογιστεί η αξία του προϊόντος
  - Αξία ενός προϊόντος είναι το άθροισμα των αξιών των συστατικών του, όπου η αξία μίας μονάδας Ά Ύλης είναι η δυική της τιμή
  - Π.χ. Για την τροφή $Φ_3$, που περιλαμβάνει 2 βιταμίνες A και 3 βιταμίνες C έχουμε: $α_3 = 2\ Y_A + 3Y_C = 2 * 0.12 + 3* 0.21 = 0.87$
  - β. Να αφαιρεθεί η αξία του προϊόντος από τον συντελεστή του προϊόντος στην αντικειμενική συνάρτηση
  - Έτσι, για το παράδειγμα του $Φ_3$, είναι $c_3 = 1.80$ και $ε_3 = c_3 – α_3 = 1.80 – 0.87 = €0.93$

Εισαγωγή στην Ανάλυση Ευαισθησίας

- Με τον όρο «ανάλυση ευαισθησίας» αναφερόμαστε στη μελέτη και ανάλυση της λύσης, όταν μεταβάλλονται ορισμένες από τις σταθερές προϋποθέσεις του προβλήματος
- Μπορούμε να ορίσουμε τρία βασικά είδη ανάλυσης ευαισθησίας που αντιστοιχούν σε:
  - Μεταβολές στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης
  - Μεταβολές στη διαθεσιμότητα των περιορισμών
  - Εισαγωγή πρόσθετης μεταβλητής

Παράδειγμα...

Μία επιχείρηση χρησιμοποιεί 3 πρώτες ύλες, τις Α, Β και Γ για να παράγει δύο προϊόντα $Π_1$ και $Π_2$. Με βάση τις προδιαγραφές της παραγωγής, για την παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος $Π_1$ πρέπει να χρησιμοποιηθούν 1 μονάδα Α, 1 μονάδα Β και 2 μονάδες Γ. Για μία μονάδα προϊόντος $Π_2$ απαιτούνται 2 μονάδες Α, 1 μονάδα Β και 1 μονάδα Γ. Η επιχείρηση διαθέτει αποθέματα ύψους 30, 20 και 36 μονάδων Α, Β και Γ αντίστοιχα. Τα προϊόντα πωλούνται στην αγορά με €200 ($Π_1$) και €300 ($Π_2$) ανά μονάδα

Ζητείται να βρεθούν οι ποσότητες των $Π_1$ και $Π_2$ οι οποίες πρέπει να παραχθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό εισόδημα.

Διαμόρφωση Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού

Πρώτη Ύλη	Προϊόντα 1	2	Ολικό Διαθέσιμο Απόθεμα
Α	1	2	30
Β	1	1	20
Γ	2	1	36
Τιμή Πώλησης	200	300	

$$\text{Max } \{Z = 200\, x_1 + 300\, x_2\}$$

$$x_1 + 2\, x_2 <= 30$$

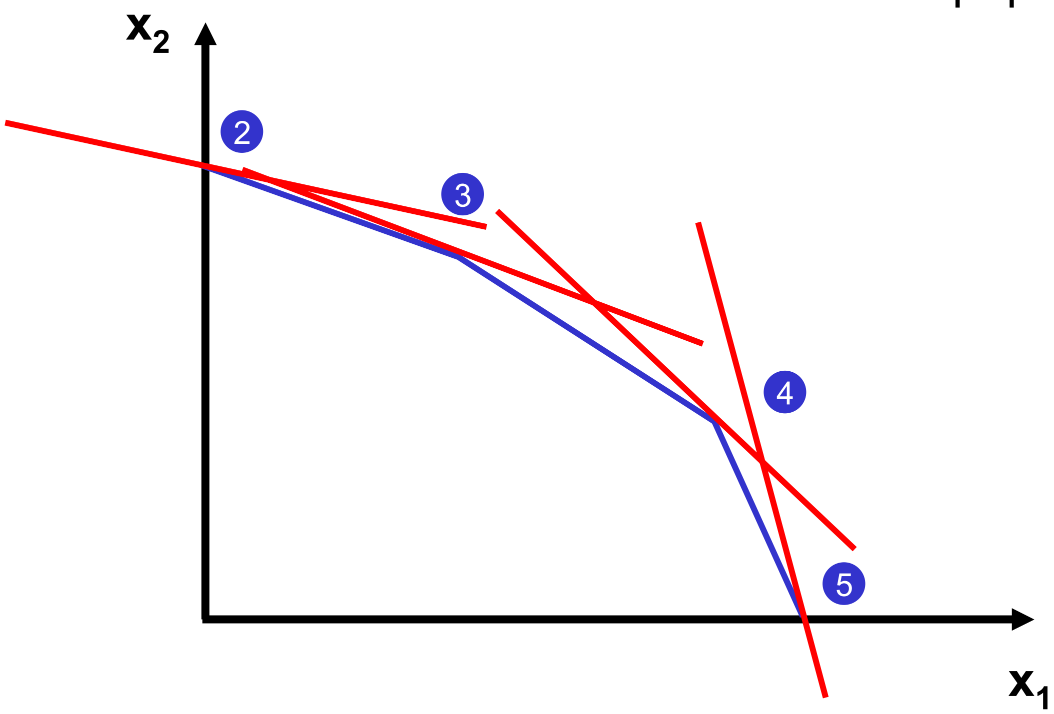
$$x_1 + 2\, x_2 <= 20$$

$$2x_1 + x_2 <= 36$$

$$x_1 >= 0,\ x_2 >= 0$$

Μεταβολές στους Συντελεστές της Αντικειμενικής Συνάρτησης

Μικρή μεταβολή στην αντικειμενική συνάρτηση δεν μεταβάλλει τη βέλτιστη λύση του προβλήματος



Η κλίση ορίζεται ως c_1 / c_2

Max $\{Z = 200\ x_1 + 300\ x_2\}$

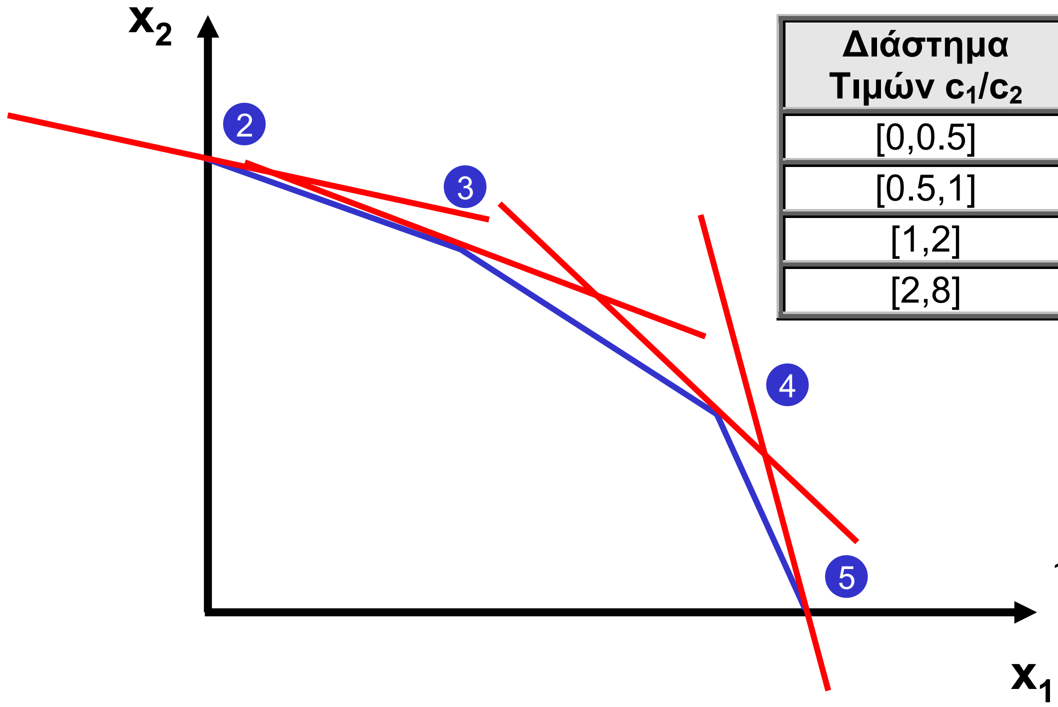
$x_1 + 2\ x_2 <= 30$

$x_1 + 2\ x_2 <= 20$

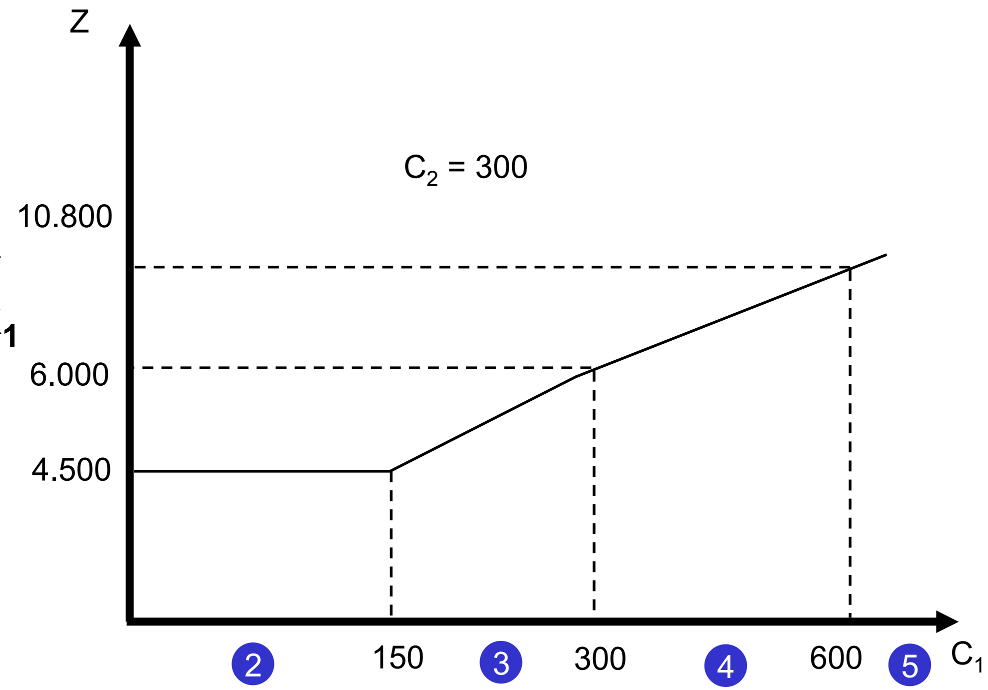
$2x_1 + x_2 <= 36$

$x_1 >= 0,\ x_2 >= 0$

Μεταβολές στους Συντελεστές της Αντικειμενικής Συνάρτησης



Διάστημα Τιμών c_1/c_2	Άριστη Γωνία	Τιμές (x_1, x_2)	Z
[0,0.5]	2	(0, 5)	$Z_1 = 15\ c_2$
[0.5,1]	3	(10, 10)	$Z_2 = 10\ c_1 + 15\ c_2$
[1,2]	4	(16, 4)	$Z_3 = 16\ c_1 + 15\ c_2$
[2,8]	5	(18, 0)	$Z_4 = 18\ c_1$



Επιπτώσεις στις Δυαδικές Τιμές

- Εάν αλλάξει ο συντελεστής μίας βασικής μεταβλητής τότε αλλάζουν οι δυαδικές τιμές
- Εάν αλλάξει ο συντελεστής μίας μη βασικής μεταβλητής, τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις:
  - Εάν η αλλαγή καθιστά τη μεταβλητή λιγότερο ανταγωνιστική (σε πρόβλημα μεγιστοποίησης μειωθεί ο συντελεστής της), τότε δεν υπάρχει καμία μεταβολή στις δυαδικές τιμές
  - Εάν η αλλαγή καθιστά τη μεταβλητή ανταγωνιστικότερη, τότε οι δυαδικές τιμές αλλάζουν μόνο εάν η μεταβολή στο συντελεστή είναι μεγαλύτερη από το επιπλέον κόστος αυτής της μεταβλητής

Μεταβολές στις Δεξιές Σταθερές των Περιορισμών

- Εάν ένας περιορισμός είναι ισότητα, τότε οποιαδήποτε μεταβολή στην αντίστοιχη διαθεσιμότητα του πόρου επιδρά αυτόματα στη βέλτιστη λύση
- Εάν ένας περιορισμός ισχύει με ανισότητα, τότε μικρές μεταβολές στην αντίστοιχη διαθεσιμότητα δεν έχουν καμία επίδραση στη βέλτιστη λύση

Ερωτήσεις...


Statistics show...
A + B=C
Bioeconomics
Today's News
Picasso's blue period
E=MC 2
The sum of the past
$ $ $ $ $
©R. Morley Inc.